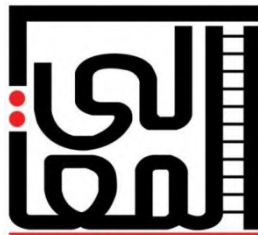
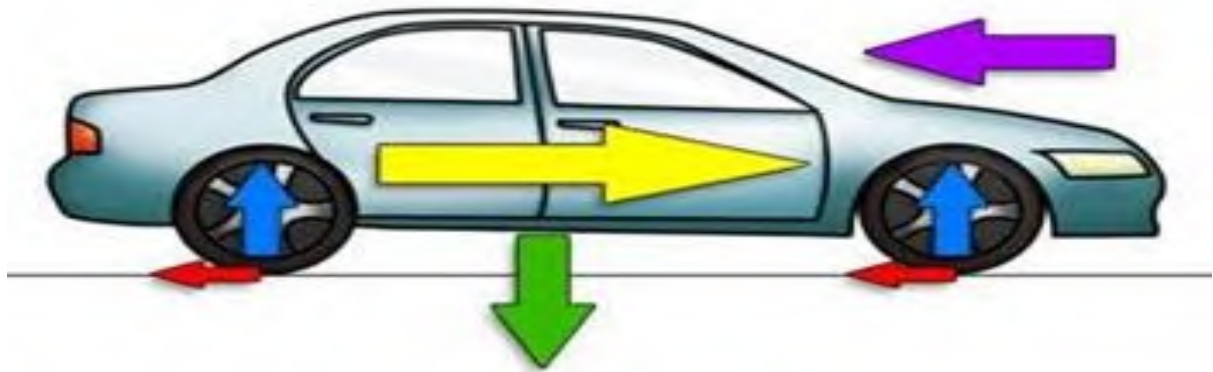
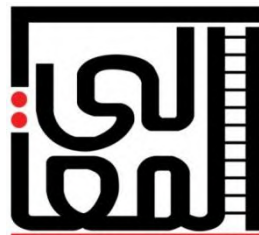
مذكرة التفوق
في الرياضيات التطبيقية

للصف الثاني الثانوي العلمي
الفصل الدراسي الثاني

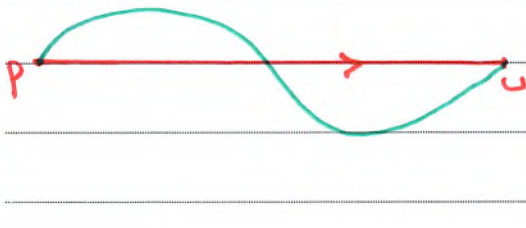
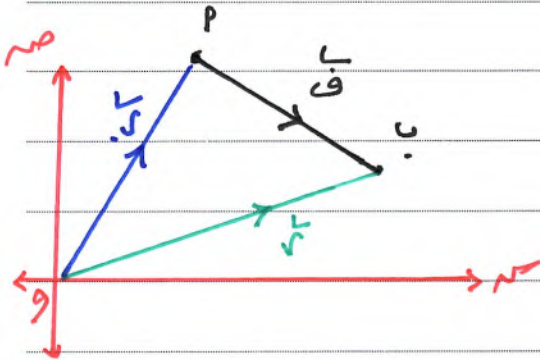
إعداد الأستاذ
السيد عبد الكريم عرابي
موجه رياضيات

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

أولاً :

الديناميكا

Weight
Reaction Force

Moving Direction
Rolling Friction
Drag Force

المعالى
دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

الحركة المستقيمة

متجه الإزاحة هو متجه يمثل بقطعة مستقيمة موجهه $\overrightarrow{أب}$ التى تنطبق نقطة بدايتها (أ) على الموضع الابتدائى للجسم ونقطة نهايتها (ب) على الموضع النهائى للجسم ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{ف}$

ملحوظة المسافة هى طول المسار الفعلى الذى قطعه الجسم
والمسافة كمية قياسية

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة

$\overrightarrow{وأ}$ يسمى متجه موضع ابتدائى عند اللحظة الابتدائية (ن) ويرمز له $\overrightarrow{ر_0}$

$\overrightarrow{وب}$ يسمى متجه موضع نهائى عند اللحظة النهائية (ن+هـ) ويرمز له $\overrightarrow{ر}$

∴ متجه الإزاحة $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_0}$

تدريب ١ يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\overrightarrow{ر}$ يعطى بالعلاقة :
$\overrightarrow{ر} = (٣ن+٢)\overrightarrow{س} + (٤ن-١)\overrightarrow{ص}$ أوجد معيار متجه الإزاحة عند ن = ٢

عند ن = ٠ ⇐ ر٠ = ٢ س - ص

∴ ف = ر - ر٠

= (٣ن٢ + ٢ ٤ن - ١) - (٢ ٤ - ١)

∴ ف = (٣ن٢ ٤ن)

عند ن = ٢ ⇐ ∴ ف = (٦ ، ٨) = ٦ س + ٨ ص

∴ ||ف|| = √(٣٦ + ٦٤) = ١٠ وحدة طول .

تدريب ٢ إذا كان ر متجه موضع جسيم يتحرك في خط مستقيم ويتحدد بالعلاقة :
ر = (٣ن٢ - ٣) ى أوجد متجه الإزاحة بعد ٤ ثوان .

الحل

عند ن = ٠ ⇐ ر٠ = -٣ ى

∴ ف = ر - ر٠

∴ ف = (٣ن٢) ى

عند ن = ٤ ⇐ ∴ ف = (٣ × ١٦) ى = ٤٨ ى

متجه السرعة متجه سرعة جسيم هو المتجه الذي معياره يساوي قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة

وحدات السرعة كم/س ، م/ث ، سم/ث

لاحظ أن

كم/س

× ٥/١٨ ← متر/ث

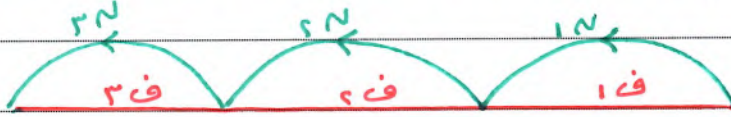
× ٢٥٠/٩ ← سم/ث

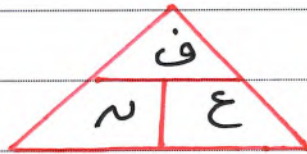
الحركة المنتظمة

هي التي يكون فيها مقدار واتجاه السرعة ثابتاً.

وفي حالة الحركة المنتظمة يكون :-

1. مقدار الازاحة = المسافة المقطوعة
2. القانون المستخدم : ف = ع × ن
3. يسمى متجه السرعة الثابتة في هذه الحالة بمتجه السرعة المنتظمة.
4. الجسم يقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية

ن۳ ن۲ ن۱
ف۳ ف۲ ف۱

5. الجسم يتحرك : بأقصى سرعة - سرعة ثابتة - سرعة منتظمة

لاحظ أن في الحركة المنتظمة

ف
ع | ن

تدريب ۳

1) إذا تحرك جسم فإن مقدار الإزاحة .... المسافة المقطوعة

(أ) < (ب) ≤ (ج) > (د) ≥

2) ۲۰ م/ث = ... كم/س

(أ) $\frac{٥٠}{٩}$ (ب) ۷۲ (ج) ۱۸ و۰ (د) ۲۰

3) إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ۷۵ كم/س لمدة ۲۰ دقيقة فإن المسافة المقطوعة بالكم تساوي

(أ) ۱۵ (ب) ۲۰ (ج) ۲۵ (د) ۳۰

٤) ٤٥ كم / دقيقة = ... م / ث

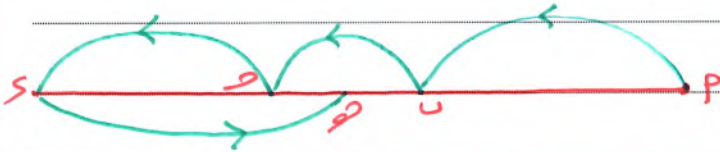
أ) ٧٥٠ ب) ١٢٫٥ ج) ١٦٢ د) ٠٫٧٥

٥) الزمن بالساعة الذي تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة منتظمة ٢٠ م/ث في قطع مسافة ١٨٠ كم يساوي

أ) $1\frac{1}{2}$ ب) ٢ ج) $2\frac{1}{2}$ د) ٣

الحل

١	٢	٣	٤	٥
د	ب	جـ	أ	جـ

الحركة المتغيرة هي الحركة التي يتغير فيها متجه سرعة الجسم في المقدار أو الاتجاه أو في كليهما من لحظة إلى أخرى

السرعة المتوسطة السرعة المتوسطة (ع م) خلال فترة زمنية هي: خارج قسمة المسافة الكلية على الزمن الكلي خلال هذه الفترة

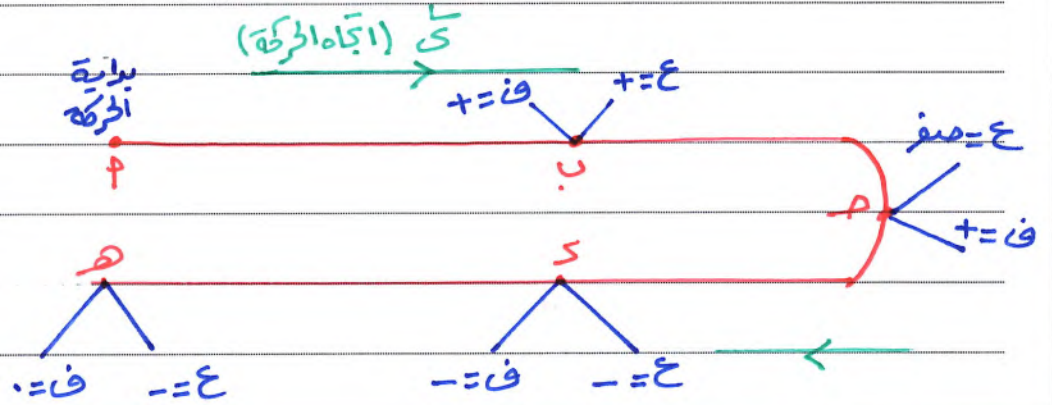
$$\text{السرعة المتوسطة (ع م)} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}$$

متجه السرعة المتوسطة اذا تحرك جسم وتواجد عند لحظتين زمنيتين $ن_1$ ، $ن_2$ وكان $\vec{ف}$ هو متجه الإزاحة فإن:

$$\text{متجه السرعة المتوسطة } \vec{ع_م} = \frac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{\vec{ف}}{ن_2 - ن_1}$$

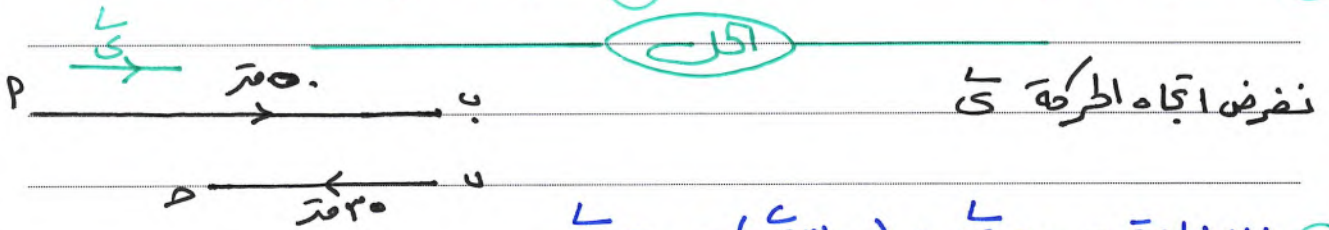
ملحوظة هامة

في حالة الحركة في خط مستقيم ثابت نفرض متجه وحدة $\vec{ى}$ في اتجاه يوازي اتجاه الحركة ، ف القياس الجبري لمتجه الإزاحة ، ع القياس الجبري لمتجه السرعة فإنه يمكن وصف حركة جسم كالآتي :-

تدريب ٤

قطع راكب دراجة مسافة ٥٠ متر على طريق مستقيم في زمن قدره ٢٠ ثانية ثم عاد فقطع مسافة ٣٠ متر في الاتجاه المعاكس في زمن قدره ١٠ ثواني أوجد في نهاية الرحلة :-

1. الإزاحة الحادثة
2. المسافة الكلية
3. السرعة المتوسطة
4. متجه السرعة المتوسطة

الحل

نفرض اتجاه الحركة $\vec{ى}$

1. الإزاحة $= ٥٠\,\vec{ى} + (-٣٠\,\vec{ى}) = ٢٠\,\vec{ى}$
2. المسافة الكلية $= ٥٠ + ٣٠ = ٨٠$ متر
3. السرعة المتوسطة $= \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٨٠}{٢٠+١٠} = \frac{٨٠}{٣٠} = \frac{٨}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$ م/ث
4. متجه السرعة المتوسطة $= \frac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن الكلي}} = \frac{٢٠\,\vec{ى}}{٣٠} = \frac{٢}{٣}\,\vec{ى}$

تدريب ٥

قطع راكب دراجة ٣٠كم على طريق مستقيم بسرعة ١٨كم/س ثم عاد على نفس الطريق فقطع ٢٠كم في الاتجاه المضاد بسرعة ١٥كم/س أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

الحل

المرحلة أب : $ن_١ = \frac{ف_١}{ع_١} = \frac{٣٠}{١٨} = \frac{٥}{٣}$ ساعة

ف١ = ٣٠كم ، ع١ = ١٨كم/س

المرحلة ب جـ : $ن_٢ = \frac{ف_٢}{ع_٢} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{٤}{٣}$ ساعة

ف٢ = ٢٠كم ، ع٢ = ١٥كم/س

∴ الزمن الكلي = $\frac{٥}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٣$ ساعات

متجه الإزاحة $\vec{ف} = ٣٠\vec{ى} + (-٢٠\vec{ى}) = ١٠\vec{ى}$

متجه السرعة المتوسطة $\vec{ع}_م = \frac{\vec{ف}}{ن} = \frac{١٠\vec{ى}}{٣} = ٣\frac{١}{٣}\vec{ى}$

∴ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\vec{ى}$ ومقداره = $٣\frac{١}{٣}$ كم/س

تدريب ٦

تواجد جسم عند لحظتين زمنيتين ٣ ، ٧ ثوان عند الموضعين أ (٥، ٢) ، ب (٩، ١٠) على الترتيب. أوجد متجه السرعة للجسم خلال هذه الفترة الزمنية. ثم أوجد مقدارها واتجاهها.

الحل

متجه الإزاحة : $\vec{ف} = \vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ}$

$= (٩، ١٠) - (٥، ٢) = (٤، ٨)$

متجه السرعة المتوسطة $\vec{ع}_م = \frac{\vec{ف}}{ن_٢ - ن_١} = \frac{(٤، ٨)}{٧ - ٣} = (١، ٢) = \vec{س} + ٢\vec{ص}$

مقدار السرعة $\|\vec{ع}_م\| = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$ وحدة سرعة ، اتجاهها ظا هـ $= \frac{ص}{س} = ٢$ ∴ هـ = ٦٣° ٢٦َ

التمثيل البياني للعلاقة بين الإزاحة - الزمن

* شكل الحركة : منتظمة
* متجه السرعة اللحظية = متجه السرعة المتوسطة

$= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} =$ ميل الخط البياني

شكل الحركة : متغيرة

متجه السرعة اللحظية

= ميل المماس للمنحنى عند هذه اللحظة

$= \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

تدريب ٧

① إذا تحرك جسم في خط مستقيم ٩ متر شرقاً ثم عاد ٣ متر غرباً فإن الإزاحة =

أ) ١٢ متر في اتجاه الشرق ب) ١٢ متر في اتجاه الغرب
ج) ٦ متر في اتجاه الشرق د) ٦ متر في اتجاه الغرب

② تحرك راكب دراجة ٦ كم غرباً ثم تحرك بعد ذلك ٨ كم بزاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب فإن مقدار الإزاحة التي قطعها راكب الدراجة = ... كم

أ) ١٤ ب) $2\sqrt{37}$ ج) $\sqrt{37}$ د) ١٢,١

③ قطع راكب دراجة ٤٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ٢٠ كم/س في اتجاه وحدة ى ثم عاد وقطع مسافة ١٥ كم في الاتجاه المعاكس بسرعة ١٥ كم/س فإن متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها هو

أ) $17\frac{1}{2}$ ى ب) $21\frac{2}{3}$ ى ج) $\frac{55}{3}$ ى د) $8\frac{1}{3}$ ى

الحل: ج ، ب ، د

السرعة النسبية

السرعة النسبية لجسم (أ) بالنسبة لجسم آخر (ب) هى السرعة التى يبدو للجسم أ أنه يتحرك بها لو أعتبرنا الجسم ب فى حالة سكون.

متجه سرعة أ بالنسبة الى ب: $\overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} - \overline{ع}_{ب}$

متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ: $\overline{ع}_{بأ} = \overline{ع}_{ب} - \overline{ع}_{أ}$

ملاحظات

١) إذا تحرك الجسمان فى اتجاه واحد: $\overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} - \overline{ع}_{ب}$

٢) إذا تحرك الجسمان فى اتجاهين متضادين: $\overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} + \overline{ع}_{ب}$

٣) $\overline{ع}_{أب} = - \overline{ع}_{بأ}$

تدريب ١

تتحرك سيارة (أ) على طريق مستقيم بسرعة ٥٠ كم/س وتتحرك سيارة أخرى (ب) على نفس الطريق بسرعة ٨٠ كم/س أوجد سرعة السيارة (أ) بالنسبة للسيارة (ب) فى كل من الحالتين الآتيتين :-

١) السيارتين فى إتجاه واحد ٢) السيارتين فى اتجاهين متضادين

الحل

١) $\overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} - \overline{ع}_{ب}$

$\overline{ع}_{أب} = ٥٠ \overline{ى} - ٨٠ \overline{ى} = -٣٠ \overline{ى}$

$\therefore ع_{أب} = ٣٠$ كم/س

٢) $\overline{ع}_{أ} = ٥٠ \overline{ى}$ ، $\overline{ع}_{ب} = -٨٠ \overline{ى}$

$\overline{ع}_{أب} = \overline{ع}_{أ} - \overline{ع}_{ب}$

$\overline{ع}_{أب} = ٥٠ \overline{ى} - (-٨٠ \overline{ى}) = ١٣٠ \overline{ى}$

$\therefore ع_{أب} = ١٣٠$ كم/س

ملحوظة يمكن حل المثال السابق باستخدام القياسات الجبرية (القياسية)

(1) السيارتين في اتجاه واحد

ع أب = ع أ − ع ب

= ٥٠ − ٨٠ = −٣٠

∴ ع أب = −٣٠ كم/س

(2) السيارتين في اتجاهين متضادين

ع أب = ع أ + ع ب

= ٥٠ + ٨٠ = ١٣٠

∴ ع أب = ١٣٠ كم/س

تدريب 2 تتحرك باخرة في خط مستقيم نحو ميناء وعندما كانت على بعد ١٢٠ كم منه مرت فوقها طائرة تطير في الاتجاه المضاد بسرعة ٣٦٠ كم/س ورصدت حركة الباخرة فبدت لها وكأنها متحركة بسرعة ٤٠٠ كم/س احسب الزمن الذي يمضي حتى تصل الباخرة للميناء

الحل

نفرض سرعة الباخرة = ع أ ، سرعة الطائرة = ع ب = ٣٦٠ كم/س

∴ ع أب = ٤٠٠ كم/س

∵ الطائرة والباخرة في اتجاهين متضادين: ∴ ع أب = ع أ + ع ب

∴ ٤٠٠ = ع أ + ٣٦٠

∴ ع أ = ٤٠ كم/س

∴ زمن وصول الباخرة = المسافة / السرعة = ١٢٠ / ٤٠ = ٣ ساعات

تدريب 3 قامت سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٢٠ كم/س ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة (ب) أصبحت ١٠٠ كم/س أوجد السرعة الفعلية لكل منهما.

الحل

نفرض: ع أ = س ، ع ب = ص

∵ ع أب = ع ب + ع أ ⟸ ∴ ١٢٠ = ص + س ——— (1)

∵ ع ن م = ١٠٠ ⇐ ∴ ١٠٠ = ص + ½ س ⟵ [٢]

بحل المعادلتين معاً : ∴ س = ع م = ٤٠ كم/س ، ص = ع ن = ٨٠ كم/س

تدريب ٤

١) إذا كانت $\overline{ع}_م$ = ١٤ $\overline{س}$ ، $\overline{ع}_ن$ = ١٠ $\overline{س}$ فإن: $\overline{ع}_{من}$ =

أ) -٤ $\overline{س}$ ب) ٤ $\overline{س}$ جـ) ٨ $\overline{س}$ د) ٢٤ $\overline{س}$

٢) إذا كانت $\overline{ع}_{من}$ = ٧٥ $\overline{ى}$ ، $\overline{ع}_م$ = -٦٠ $\overline{ى}$ فإن: $\overline{ع}_ن$ =

أ) ١٣٥ $\overline{ى}$ ب) -١٣٥ $\overline{ى}$ جـ) ١٥ $\overline{ى}$ د) -٧٥ $\overline{ى}$

٣) يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم/س ويتحرك في نفس الإتجاه راكب آخر ب بسرعة ١٢ كم/س فإن القياس الجبري لمتجه سرعة ب بالنسبة إلى أ تساوي .... كم/س

أ) -٣ ب) ٣ جـ) ٢٧ د) -٢٧

٤) أ ، ب جسمان يتحركان في اتجاهين متضادين ، ومعيار سرعة أ ضعف معيار سرعة ب فإن السرعة النسبية للجسم أ بالنسبة للجسم ب =

أ) ١,٥ ع أ ب) ٢ ع أ جـ) ٢,٥ ع أ د) ٣ ع أ

٥) دراجة بخارية تسير بسرعة ٤٠ كم/س في اتجاه متجه وحدة $\overline{ى}$ لاحظ راكبها أن سيارة تسير في الاتجاه المضاد تتحرك بسرعة ١٠٥ كم/س فإن متجه سرعة السيارة هو

أ) ١٠٠ $\overline{ى}$ ب) -١٠٠ $\overline{ى}$ جـ) ٦٥ $\overline{ى}$ د) -٦٥ $\overline{ى}$

ب	ب	أ	أ	د	

الحركة منتظمة التغير

هى الحركة التى يتغير فيها متجه سرعة الجسم من لحظة لأخرى فى المقدار أو الاتجاه أو كليهما

متجه العجلة هو المعدل الزمنى للتغير فى متجه السرعة
أو هو التغير فى متجه السرعة فى وحدة الزمن

إذا كان $\overline{ع}_1$ ، $\overline{ع}_2$ متجهى سرعة جسم عند لحظتين متتاليتين $ن_1$ ، $ن_2$ فإن:

متجه العجلة المتوسطة $\overline{ح}_م = \frac{\overline{ع}_2 - \overline{ع}_1}{ن_2 - ن_1}$

* وحدات العجلة : م / ث^2 ، سم / ث^2

معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

$\overline{ع}_.$ متجه سرعة الجسم عند بداية الزمن
$\overline{ع}$ متجه سرعة الجسم فى نهاية فترة زمنية (ن)
$\overline{ف}$ متجه الإزاحة التى حدثت على الجسم خلال فترة زمنية (ن)
$\overline{ح}$ متجه العجلة.

① $ع = ع_. + ح ن$ — العلاقة بين السرعة والزمن

② $ع^2 = ع_.^2 + 2 ح ف$ — العلاقة بين السرعة والازاحة

③ $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} ح ن^2$ — العلاقة بين الازاحة والزمن

ملاحظات

1. عند بداية حركة الجسم يكون ن = صفر
2. إذا بدأ الجسم حركته من السكون فإن: ع. = صفر
3. إذا تحرك جسم وبعد فترة سكن الجسم فإن: ع = صفر
4. إذا عاد الجسم إلى موضعه الأصلي فإن: ف = صفر
5. إذا تحرك الجسم بأقصى سرعة له فإن: جـ = صفر
6. إذا تحرك الجسم بسرعة منتظمة فإن: جـ = صفر
7. إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة فإن: جـ = صفر

الخلاصة

أنواع الحركة في خط مستقيم

حركة منتظمة

متجه السرعة ع ثابتة

$\text{ع} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}}$

حركة متغيرة

متجه السرعة ع يتغير

$\text{ع}_{\text{م}} = \frac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن الكلي}}$

حركة منتظمة التغير

متجه السرعة ع يتغير بمعدل زمني ثابت

1. $\text{ع} = \text{ع}_0 + \text{جـ ن}$
2. $\text{ع}^2 = \text{ع}_0^2 + 2\,\text{جـ ف}$
3. $\text{ف} = \text{ع}_0\,\text{ن} + \frac{1}{2}\,\text{جـ ن}^2$

تدريب ١
بدأ جسم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ١٠ سم/ث وبعجلة منتظمة مقدارها ٤ سم/ث² تعمل في اتجاه السرعة الابتدائية أوجد:
① سرعة الجسم في نهاية دقيقة واحدة من بدء الحركة
② المسافة التي يقطعها في هذه الدقيقة

الحل

ع. = ١٠ ، جـ = ٤ ، ن = ٦٠ ث ، ع = ??

نوع الحركة: بعجلة
معادلة الحركة: ع = ع. + جـ ن
ع = ١٠ + ٤ × ٦٠
ع = ٢٥٠ سم/ث

ع. = ١٠ ، جـ = ٤ ، ن = ٦٠ ث ، ع = ، ف = ??

نوع الحركة: بعجلة
معادلة الحركة: ف = ع. ن + ½ جـ ن²
ف = ١٠ × ٦٠ + ½ × ٤ × ٣٦٠٠
ف = ٧٨٠٠ سم

ملحوظة
① اذا كان اتجاه العجلة في نفس اتجاه السرعة فإن الحركة متسارعة
② إذا كان اتجاه العجلة في عكس اتجاه السرعة فإن الحركة تقصيرية

تدريب ٢
قذفت كرة بسرعة ٢٠ سم/ث وبعجلة تقصيرية ٢ سم/ث² أوجد:
① المسافة التي قطعتها الكرة حتى سكنت لحظياً
② متى تكون الكرة على بعد ٩٦ سم من نقطة البداية .

الحل

ع. = ٢٠ ، جـ = -٢ ، ع = صفر ، ف = ??? ، ن =

نوع الحركة: بعجلة
معادلة الحركة: ع² = ع.² + ٢ جـ ف
٠ = (٢٠)² - ٢ × ٢ ف
∴ ف = ١٠٠ سم

(٢) نوع الحركة : بعجلة

معادلة الحركة : ف = ع. ن + ½ جـ ن²

٩٦ = ٢٠ ن − ½ × ٢ ن²

ن² − ٢٠ ن + ٩٦ = ٠

∴ ن = ٨ ث أو ن = ١٢ ث — فلماذا إجابتين ؟

تدريب ٣ : نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٦٦ كم/س إلى ١٢ كم/س بعد أن قطعت مسافة ٥٨٥ متر . أوجد الزمن الذي قطعت فيه السيارة هذه المسافة . وما المسافة التي تقطعها بعد ذلك حتى تسكن

الحل

خطوات حل المسألة :-

(i) التحويلات : ع. = ٦٦ × ٥/١٨ = ٥٥/٣ م/ث ، ع = ١٢ × ٥/١٨ = ١٠/٣ م/ث

(ii) رسم المسألة لأن الجسم يتحرك على مرحلتين

(i) دراسة المرحلة أ ← ب

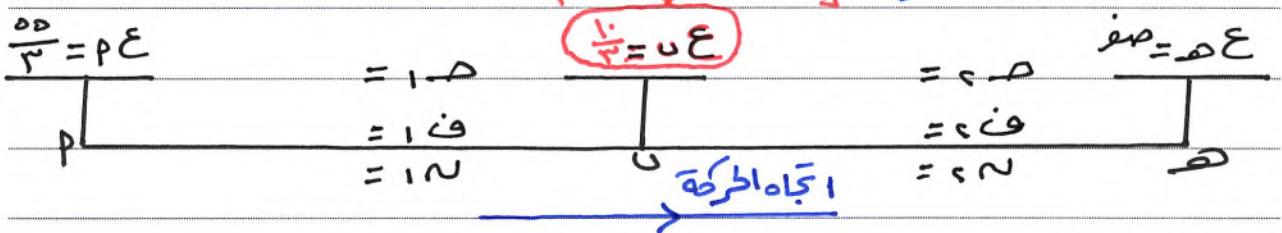
ع² = ع.² + ٢ جـ ف

(١٠/٣)² = (٥٥/٣)² + ٢ جـ١ × ٥٨٥

∴ جـ = −٥/١٨ م/ث²

∵ ع = ع. + جـ ن

∴ ١٠/٣ = ٥٥/٣ − ٥/١٨ ن١

∴ ن١ = ٥٤ ث

(ii) دراسة المرحلة ب ← هـ

العجلة في هذه المرحلة هي نفس العجلة السابقة

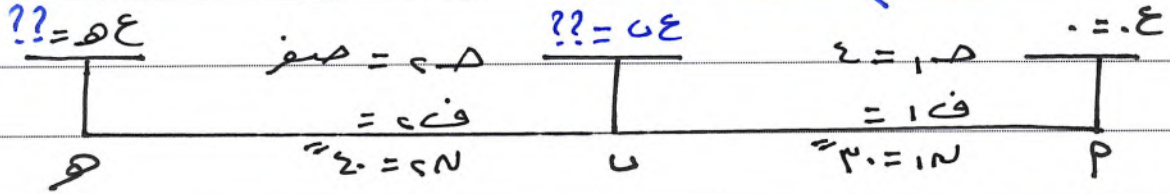
∴ ع² = ع.² + ٢ جـ ف

∴ ٠ = (١٠/٣)² − ٢ × ٥/١٨ ف٢

∴ ف٢ = ٢٠ متر

لاحظ : السرعة النهائية في المرحلة الأولى تعتبر سرعة ابتدائية في الثانية

تدريب ٤

بدأ جسم حركته من السكون في خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٤ سم/ث² لمدة ٣٠ ثانية ثم تحرك بالسرعة التي اكتسبها لمدة ٤٠ ثانية أخرى في نفس الاتجاه أوجد مقدار سرعته المتوسطة

الحل

المرحلة من أ ← ب

∵ ف = ع. ن + ½ جـ ن²

∴ ف١ = ٠ + ½ × ٤ × ٩٠٠

∴ ف١ = ١٨٠٠ سم

∵ ع = ع. + جـ ن

∴ ع = ٠ + ٤ × ٣٠ = ١٢٠ سم/ث

المرحلة ب ← هـ

نوع الحركة: منتظمة (جـ = ٠)

معادلة الحركة: ف = ع × ن

∴ ف٢ = ١٢٠ × ٤٠

∴ ف٢ = ٤٨٠٠ سم

∴ السرعة المتوسطة ع م = المسافة الكلية ÷ الزمن الكلي = (١٨٠٠ + ٤٨٠٠) ÷ (٣٠ + ٤٠) = ٩٤ ٢/٧ سم/ث

تدريب ٥

(١) ١٨٠ متراً / ساعة / ث = ... سم/ث²

(أ) ١/٢٠ (ب) ٥ (جـ) ٣٠ (د) ٣٠٠

(٢) المسافة التي يقطعها جسم يتحرك في اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها ٥ سم/ث² في زمن قدره ٤ ثوانٍ = ... سم

١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠

(٣) انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقداره ٤ م/ث² فإن المسافة التي تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها ٢٤ م/ث هي .... متر

(أ) ٧٢ (ب) ٣٥ (ج) ٩٦ (د) ٨١

(٤) يتحرك جسم في خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٨ م/ث² وفي اتجاه مضاد لاتجاه سرعته الابتدائية مقدارها ٤ م/ث فإن سرعة الجسم بعد ½ دقيقة من بدء الحركة =

(أ) ١,٦ م/ث (ب) ١٦ م/ث (ج) ٥,٧٦ كم/س (د) صفر

(٥) إذا تناقصت سرعة سيارة من ٩٠ كم/س إلى ٣٦ كم/س خلال ٥ ثوان فإن السيارة تتحرك بتقصير مقداره .... م/ث²

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (ج) ١٠ (د) ٣

(٦) بدأ جسم حركته بسرعة ٧٢ كم/س بتقصير منتظم ٢ م/ث² فإن الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يسكن يساوي .... ثانية

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٣٦

(٧) بدأ جسم حركته بسرعة ٧ م/ث بعجلة منتظمة ٢ م/ث² فقطع مسافة ٣٠ متراً ثم انقطعت العجلة وسار بسرعة منتظمة مسافة ٥٢ متراً فإن الزمن الكلي للرحلة = ... ث

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ١٤

ب	ج	أ	ج	د	ب	ج

السرعة المتوسطة خلال الثانية النونية

1) المسافة المقطوعة خلال الثانية النونية = $ف_ن - ف_{ن-1}$

2) السرعة المتوسطة لجسم خلال فترة زمنية = سرعته اللحظية عند منتصف الفترة

3) المسافة = السرعة المتوسطة × الزمن

تدريب 1: بدأ جسم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٣٠ م/ث وعجلة منتظمة ٦ م/ث² في نفس اتجاه سرعته أوجد:

1) المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة

2) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة فقط

الحل

1) نوع الحركة: بعجلة

معادلة الحركة: $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2$

$ف = ٣٠ \times ٥ + \frac{1}{2} \times ٦ \times ٢٥$

$\therefore ف = ٢٢٥$ م

2) نوجد المسافة بعد ٥ ثوان

$ف = ٣٠ \times ٥ + \frac{1}{2} \times ٦ \times ٢٥ = ٢٢٥$ م

نوجد المسافة بعد ٤ ثوان

$ف = ٣٠ \times ٤ + \frac{1}{2} \times ٦ \times ١٦ = ٧٢$ م

$\therefore$ المسافة خلال الثانية الخامسة $= ف_{ن=٥} - ف_{ن=٤} = ٢٢٥ - ٧٢ = ١٥٣$ م

تدريب ٤: يتحرك جسم بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت فقطع ٢٦ متراً فى الثانية الرابعة من بدء الحركة ، ٥٦ متراً خلال الثانية التاسعة.
احسب العجلة التى يتحرك بها والسرعة الابتدائية عند بدء الحركة.

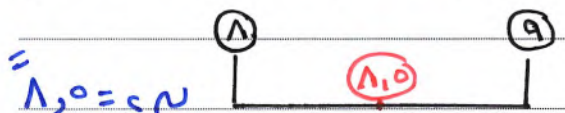
الحل

سرعة متوسطة	سرعة لحظية
ع م = ف / ن	ع = ع. + جـ ن

خلال الثانية ن١ = ١ ، زمن منتصف الفترة (بين ٣ ، ٤): ن١ = ٣,٥

ع م = ٢٦ / ١ = ٢٦ م/ث ⟵ ٢٦ = ع. + ٣,٥ جـ ⟵ (١)

السرعة المتوسطة = السرعة اللحظية عند منتصف الفترة

خلال الثانية ن٢ = ١ ، زمن منتصف الفترة (بين ٨ ، ٩): ن٢ = ٨,٥

ع م = ٥٦ / ١ = ٥٦ م/ث ⟵ ٥٦ = ع. + ٨,٥ جـ ⟵ (٢)

∴ جـ = (ع٢ − ع١) / (ن٢ − ن١) = (٥٦ − ٢٦) / (٨,٥ − ٣,٥) = ٦ م/ث٢

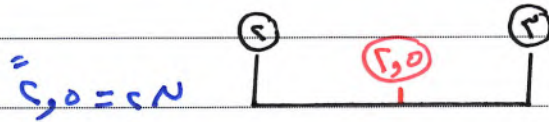
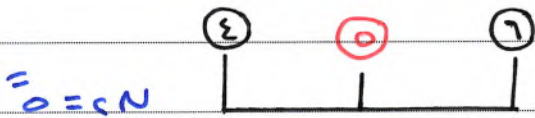
بالتعويض فى (٢) ⟸ ∴ ٥٦ = ع. + ٨,٥ × ٦

∴ ع. = ٥ م/ث

ملحوظة: يمكن حل المعادلتين ١ ، ٢ معاً لنوجد جـ ، ع.

تدريب ٣ تحرك جسم بسرعة ابتدائية ما في اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة فإذا قطع في الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠ متراً . ثم قطع في الثانيتين الخامسة والسادسة معاً ٦٠ متراً أوجد العجلة التي تحرك بها الجسم وسرعته الابتدائية

الحل

سرعة متوسطة: $ع_م = \frac{ف}{ن}$

سرعة لحظية: $ع = ع_. + جـ ن$

خلال الثانية ن١ = ١ (٢ — ٢,٥ — ٣) ن٢ = ٢,٥

$ع_م = \frac{٢٠}{١} = ٢٠$ م/ث ← $٢٠ = ع_. + ٢,٥ جـ$ —— (١)

خلال الثانيتين ن١ = ٢ (٤ — ٥ — ٦) ن٢ = ٥

$ع_م = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$ م/ث ← $٣٠ = ع_. + ٥ جـ$ —— (٢)

$جـ = \frac{ع_٢ - ع_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{٣٠ - ٢٠}{٥ - ٢,٥} = ٤$ م/ث²

بالتعويض: ∴ $٣٠ = ع_. + ٥ \times ٤$

∴ $ع_. = ١٠$ م/ث

الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية

تتحرك الأجسام رأسياً حركة حرة تحت تأثير قوة جذب الأرض بعجلة منتظمة ثابتة تسمى عجلة الجاذبية الأرضية د حيث: د = ٩٨٠ سم/ث² ؛ د = ٩,٨ م/ث²

قوانين الحركة الرأسية

	الجسم هابط	الجسم صاعد
١	ع = ع. + د ن	ع = ع. − د ن
٢	ع² = ع.² + ٢ د ف	ع² = ع.² − ٢ د ف
٣	ف = ع. ن + ½ د ن²	ف = ع. ن − ½ د ن²

ملاحظات

١) إذا سقط الجسم فإن **ع. = صفر**

٢) إذا وصل الجسم لأقصى ارتفاع **ع = صفر**

٣) إذا قذف جسم رأسيا لأعلى وعاد إلى نقطة القذف فإن:
زمن الصعود لأقصى ارتفاع = زمن الهبوط

٤) مقدار سرعة الجسم عند أى نقطة وهو صاعد = مقدار السرعة عند نفس النقطة وهو هابط

⑤ زمن الصعود لأقصى إرتفاع $ن = \frac{ع.}{د}$

⑥ مسافة الوصول لأقصى إرتفاع $ف = \frac{ع.^2}{2د}$

⑦ اذا قذف جسم رأسياً لأعلى من ارتفاع (ف) عن سطح الارض فإن

$$- ف = ع.ن - \frac{1}{2} د ن^2$$

تدريب ١

قذف حجر في بئر فارغ بسرعة ٤ م/ث رأسياً لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد ٢ ثانية أوجد

① عمق البئر ② سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر

الحل

① ∵ $ف = ع.ن + \frac{1}{2} د ن^2$

∴ $ف = 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4$

∴ ف = ٢٧,٦ متر

② ∵ $ع = ع. + د ن$

∴ $ع = 4 + 9.8 \times 2$

∴ ع = ٢٣,٦ م/ث

تدريب ٢

قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٤٩ م/ث أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التي وصل إليها.

الحل

∵ $ع = ع. - د ن$

∴ $0 = 49 - 9.8 ن$

∴ ن = ٥ ث

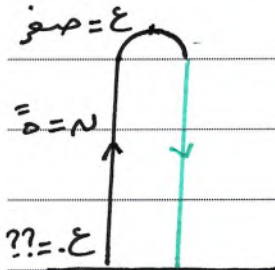
$ع^2 = ع.^2 - 2 د ف$

$0 = (49)^2 - 2 \times 9.8 ف$

ف = ١٢٢,٥ متر

تدريب ٣ قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ١٠ ثوانٍ من لحظة القذف أوجد:

① سرعة الجسم الابتدائية ② أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

الحل

∵ زمن الوصول لأقصى ارتفاع = زمن الهبوط

① ∴ ن = ٥ ث

∵ ع = ع. − د ن

٠ = ع. − ٩,٨ × ٥

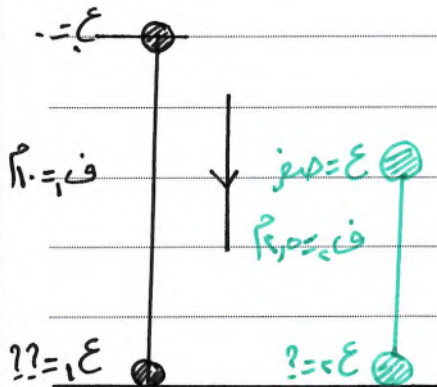
∴ ع. = ٤٩ م/ث

② ∵ ع² = ع.² − ٢ د ف

٠ = (٤٩)² − ٢ × ٩,٨ ف

∴ ف = ١٢٢,٥ متر

تدريب ٤ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ متر عن سطح الأرض فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسياً إلى أعلى مسافة ٢,٥ متر إحسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض.

الحل

مرحلة السقوط

ع² = ع.² + ٢ د ف

ع₁² = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠

∴ ع₁ = ١٤ م/ث

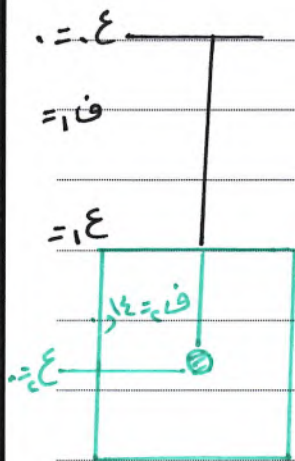
مرحلة الارتداد

ع² = ع.² − ٢ د ف

٠ = ع.² − ٢ × ٩,٨ × ٢,٥

∴ ع₂ = ٧ م/ث

تدريب ٥

سقط جسم رأسياً لأسفل من إرتفاع ما نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة ١٤سم قبل أن يسكن فإذا كان الجسم يتحرك داخل الأرض بتقصير منتظم مقداره ٦٣م/ث² فما هو الارتفاع الذى سقط منه الجسم

الحل

مرحلة السقوط [خارج الأرض]

ع² = ع.² + ٢ د ف

∴ ع² = ٠ + ٢×٩,٨ ف

ع² = ١٩,٦ ف ← [١]

مرحلة داخل الأرض

ع² = ع.² + ٢ ح ف

٠ = ع.² + ٢×(-٦٣)×٠,١٤

∴ ع. = ٤,٢ م/ث ← [٢] سرعة الجسم لحظة وصوله للأرض

بالتعويض فى [١] ⇐ (٤,٢)² = ١٩,٦ ف

⇐ ف = ٠,٩ متر

تدريب ٦

قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ١٤م/ث من نقطة على إرتفاع ٣٥٠ متر عن سطح الأرض أوجد الزمن الذى يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض

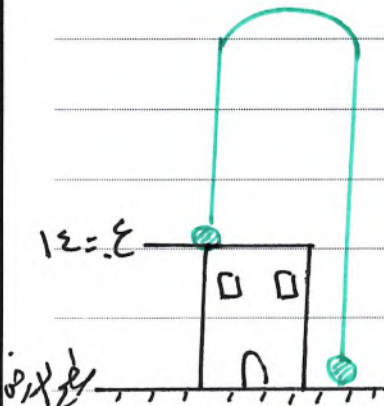
الحل

∵ ف = ع. ن - ½ د ن²

-٣٥٠ = ١٤ ن - ½×٩,٨ ن²

٧ ن² - ٢٠ ن - ٥٠٠ = ٠

∴ ن = ١٠ث أو ن = -٥٠/٧ مرفوض

ملاحظة: ف = -٣٥٠ لأن الجسم سقط إلى نقطة ما بعد القذف

تدريب ٨

١) قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ٤٢ م/ث فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم = ... متر

أ) ٦٥ ب) ٩٨ ج) ٨٤ د) ٩٠

٢) إذا سقط جسم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض أفقية فإن سرعته لحظة اصطدامه بالأرض بوحدة م/ث هي

أ) صفر ب) ٢٠ ج) ١٤ د) ١٩٦

٣) سقطت كرة من إرتفاع ٩٠ متر عن سطح الأرض وعند وصولها للأرض ارتدت ثانية إلى أعلى بسرعة تساوي نصف سرعة وصولها إلى الأرض. فإن أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة = متر

أ) ٤٥ ب) ١٨ ج) ٢٢,٥ د) ١٩,٦

٤) إذا سقط جسم من إرتفاع ١٩,٦ متر على أرض رملية فغاص فيها ١٤ سم حتى سكن فإن عجلة حركة الجسم داخل الرمل بوحدة م/ث² تساوي

أ) ‎-١٣٧٢ ب) ‎-٩,٨ ج) ١٩,٦ د) ١٧٢

٥) سقط جسم من إرتفاع ٤٩٠ متر عن سطح الأرض فإن سرعته المتوسطة خلال الثواني الثالثة والرابعة والخامسة من سقوطه = م/ث

أ) ٥٤ ب) ٥٣ ج) ٥٢,٥ د) ٥٣,٥

٦) سقط جسم من إرتفاع ١٢٢,٥ متر عن سطح الأرض رأسياً فإن المسافة التي يقطعها الجسم خلال الثانية الأخيرة قبل اصطدامه بالأرض مباشرة تساوي ..... متر

أ) ٤٨,٠٢ ب) ٧٨,٤ ج) ٣٩,٢ د) ٤٤,١

٦	٥	٤	٣	٢	١
د	ج	ج	أ	د	د

قانون الجذب العام

كل الأجسام في الكون تتجاذب مع الأجسام الأخرى بتأثير قوة متبادلة تتناسب طردياً مع كل من كتلتي الجسمين وعكسياً مع مربع المسافة بين مركزيهما.

إذا كانت : ق قوة الجذب المتبادلة بين الجسمين

ك١، ك٢ كتلتا الجسمين بالكجم

ف المسافة بين مركزي الجسمين بالمتر

ث ثابت الجذب العام حيث ث = ٦٫٦٧ × ١٠^-١١ نيوتن.م٢/كجم٢

فإن :

$$ق = ث \times \frac{ك_1 ك_2}{ف^2}$$

العلاقة بين عجلتي الجاذبية على سطحي كوكبين

$$\frac{د_1}{د_2} = \frac{ك_1}{ك_2} \times \frac{نق_2^2}{نق_1^2}$$

شدة مجال الجاذبية الأرضية

هي قوة جذب الأرض لكتلة تساوي ١ كجم عند نقطة ما

$$م = ث \times \frac{ك}{(نق + ع)^2}$$

ع : ارتفاع الجسم عن سطح الأرض بالمتر

نق : طول نصف قطر الأرض بالمتر

ك : كتلة الأرض بالكجم

تدريب ١

كرتان كتلة الأولى ٥٫٢ كجم وكتلة الثانية ٠٫٢٥ كجم وضعت الكرتان بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠ سم احسب قوة التجاذب بينهما علماً بأن ثابت الجذب العام = $٦٫٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن.م²/كجم²

الحل

$ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

∴ $ق = ٦٫٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{٥٫٢ \times ٠٫٢٥}{(٠٫٥)^٢}$ ⇐ ∴ $ق = ٣٫٤٦٨٤ \times ١٠^{-١٠}$ نيوتن

تدريب ٢

إذا علمت أن كتلة الأرض = ٦×١٠^{٢٤} كجم وكتلة القمر ٧×١٠^{٢٢} كجم والمسافة بين مركزيهما ٣×١٠^{٦} متر أوجد قوة جذب الأرض للقمر

الحل

∵ $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

∴ $ق = ٦٫٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{٦ \times ١٠^{٢٤} \times ٧ \times ١٠^{٢٢}}{(٣ \times ١٠^{٦})^٢}$ ⇐ ∴ $ق = ٣٫١١ \times ١٠^{٢٤}$ نيوتن

تدريب ٣

قمر صناعي كتلته ٤٠٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض فإذا كانت كتلة الأرض ٦×١٠^{٢٤} كجم وطول نصف قطرها $٦٫٣٦ \times ١٠^{٦}$ متر أوجد قوة الجذب المتبادلة بين الأرض والقمر الصناعي.

الحل

∵ ف = نق + ع

∴ $ف = ٦٫٢٦ \times ١٠^{٦} + ٤٤٠٠٠٠$ متر

∵ $ق = ث \times \frac{ك_١ ك_٢}{ف^٢}$

$ق = ٦٫٦٧ \times ١٠^{١١} \times \frac{٦ \times ١٠^{٢٤} \times ٤٠٠٠}{(٦٫٣٦ \times ١٠^{٦} + ٤٤٠٠٠٠)^٢} = ٣٤٦١٩$ نيوتن

تدريب ٤

١) كوكب كتلته مساوية ثلاث مرات كتلة الأرض وقطره يساوي ثلاث مرات قدر قطر الأرض فإن النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب وسطح الأرض =

(أ) ١ : ٩ (ب) ١ : ٣ (جـ) ٩ : ١ (د) ٣ : ١

٢) إذا كان طول نصف قطر كل من القمر والأرض ١٦٠٠ كم ، ٦٤٠٠ كم على الترتيب وكانت النسبة بين عجلتي الجاذبية لكل منهما ١ : ٦ فإن النسبة بين كتلتيهما على الترتيب =

(أ) ١ : ٢٤ (ب) ٢٤ : ١ (جـ) ٩٦ : ١ (د) ١ : ٩٦

٣) إذا علمت أن كتلة الأرض $٦,٠٦ \times ١٠^{٢٤}$ كجم وطول نصف قطرها $٦,٢٦ \times ١٠^{٦}$ متر فإن شدة مجال الجاذبية الأرضية على سطح الأرض = ... نيوتن

(أ) ٩,٨ (ب) ٩,٨١ (جـ) ٩,٩٩٣ (د) ٩,٨٩

٤) إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (د) هي ١٠ م/ث² وطول نصف قطر الأرض يساوي $٦,٣٦ \times ١٠^{٦}$ متر فإن كتلة الأرض = ... كجم

(أ) $٤,٠٤ \times ١٠^{١٤}$ (ب) $٥,٩٨ \times ١٠^{٢٤}$ (جـ) $٦,٠٦ \times ١٠^{٢٢}$ (د) $٦,٠٦ \times ١٠^{٢٤}$

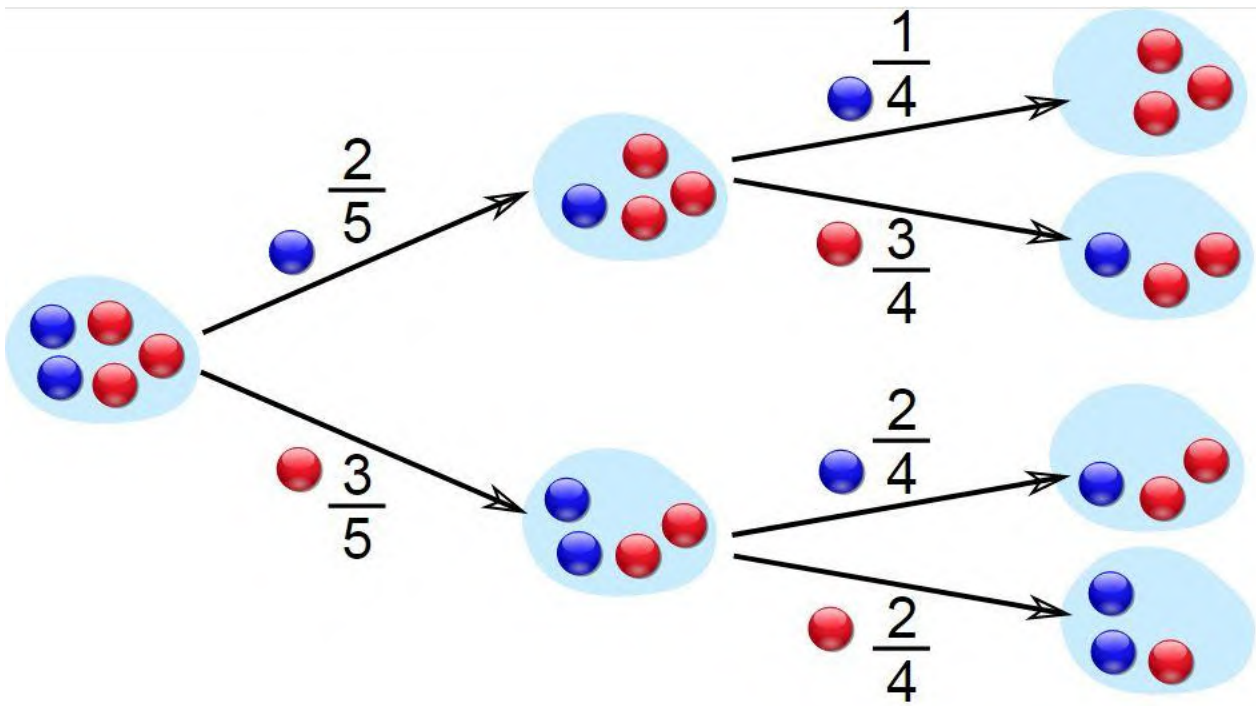
الحل	ب	د	جـ	د

تم بحمد الله

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

ثانياً :
الاحتمالات

2/5
3/5
1/4
3/4
2/4
2/4

المعالى
دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

الإحتمالات

التجربة العشوائية: هي تجربة معروف نتائجها الممكنة قبل اجراؤها ولكننا لا نستطيع تحديد أى النواتج سيتحقق عند إجراؤها .

فضاء العينة: هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما

ملاحظات
* يرمز لفضاء العينة بالرمز "ف" ويرمز لعدد عناصره ن(ف)
* يمثل فضاء العينة بالشجرة البيانية أو الشبكة البيانية

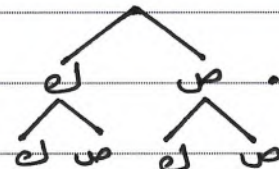
تدريب ١

١) أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ؟

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ن(ف) = ٦

٢) أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين ؟

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

ن(ف) = ٤

الأحداث

الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواع الحدث

١) الحدث المؤكد (ف) : هو حدث لابد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية

٢) الحدث المستحيل : هو الحدث الذى لا يمكن أنه يقع عند إجراء التجربة العشوائية

٣) الحدث البسيط : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى على عنصر واحد فقط .

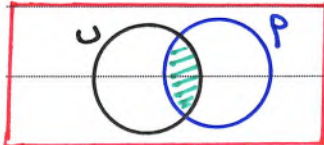
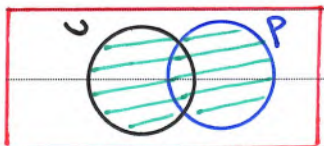
تدريب ٢: فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه . أكتب الأحداث التالية

١) أ : حدث وقوع عدد فردى
٢) ب : حدث وقوع عدد زوجى
٣) حـ : حدث ظهور عدد أولى
٤) د : حدث ظهور عدد أكبر من ٧
٥) هـ : حدث ظهور عدد بين ٣ ، ٥
٦) و : حدث ظهور عدد أقل من ٧

الحل

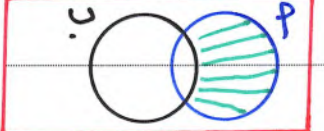
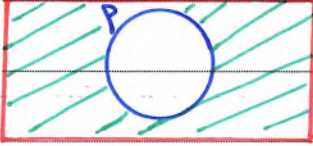
فضاء العينة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

١) أ = {١ ، ٣ ، ٥}
٢) ب = {٢ ، ٤ ، ٦}
٣) حـ = {٢ ، ٣ ، ٥}
٤) د = { } = ϕ
٥) هـ = {٤}
٦) و = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

العمليات على الأحداث

التقاطع أ ∩ ب
حدث وقوع أ (و) ب
حدث وقوع أ ، ب (معاً)

الاتحاد أ ∪ ب
حدث وقوع أ (أو) ب
حدث وقوع أحدهما على الأقل

الفرق (أ − ب)
حدث وقوع أ (فقط)
حدث وقوع أ و عدم وقوع ب

الحدث المكمل أَ

حدث عدم وقوع أ

تدريب ٣

صندوق به بطاقات مرقمة من ١ إلى ٧ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً ولوحظ الرقم عليها أكتب فضاء العينة ثم أوجد الأحداث التالية:-

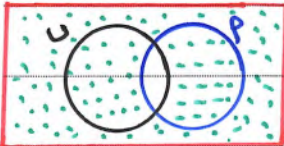
١) أ حدث الحصول على عدد فردي
٢) ب حدث الحصول على عدد أولي
٣) حدث وقوع أ، ب معاً
٤) حدث وقوع أ أو ب
٥) حدث وقوع أ فقط
٦) حدث عدم وقوع أ

الحل

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

١) أ = {١، ٣، ٥، ٧}
٢) {٢، ٣، ٥، ٧}
٣) أ ∩ ب = {٣، ٥، ٧}
٤) أ ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٥، ٧}
٥) أ − ب = {١}
٦) أَ = {٢، ٤، ٦}

ملاحظات

١) (أ ∩ ب)َ = أَ ∪ بَ
حدث عدم وقوع أ و ب معاً
حدث وقوع أحدهما على الأكثر

٢) (أ ∪ ب)َ = أَ ∩ بَ
حدث عدم وقوع أي من الحدثين
حدث عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

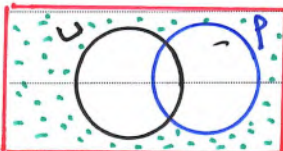
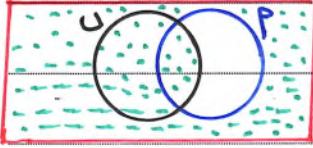
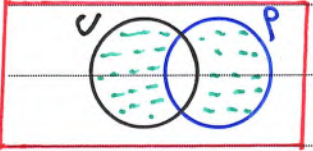
③ $(أ - ب)' = أ' \cup ب$

حدث عدم وقوع أ فقط

حدث وقوع ب أو عدم وقوع أ

ف ، أ ، ب

④ $(أ - ب) \cup (ب - أ)$

$= (أ \cup ب) - (أ \cap ب)$

حدث وقوع أحد الحدثين فقط

حدث وقوع أ فقط أو ب فقط

أ ، ب

⑤ يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا وفقط إذا كان: $أ \cap ب = \phi$

⑥ $أ \cup أ' = ف$ ، $أ \cap أ' = \phi$

⑦ $(أ - ب) = أ \cap ب'$ حدث وقوع أ و عدم وقوع ب

⑧ إذا كان $أ \subset ب$ فإن:

$أ \cup ب = ب$ $أ \cap ب = أ$ $أ - ب = \phi$

تدريب ٤

ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوي لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد مثل فضاء العينة بشكل تجري ثم أوجد الأحداث الآتية:

① أ حدث ظهور كتابة وعدد زوجي

② ب حدث ظهور صورة وعدد فردي

③ جـ حدث وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب

④ د حدث وقوع الحدث أ فقط

⑤ هـ حدث عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب

حساب الإحتمال

مثال تمهيدي في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.
أكتب فضاء العينة . ثم أوجد الأحداث التالية :-

① أ حدث وقوع عدد زوجي
② ب حدث وقوع عدد يتحصر بين ٣ ، ٦
③ جـ حدث وقوع عدد أكبر من ٧
④ د حدث وقوع عدد أقل من ٧

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ن(ف) = ٦ عدد العناصر

① أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ن(أ) = ٣ عدد عناصر الحدث أ

حساب إحتمال وقوع الحدث أ = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

② ب = {٤ ، ٥} ن(ب) = ٢ عدد عناصر الحدث ب

حساب إحتمال وقوع الحدث ب = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} = \frac{ن(ب)}{ن(ف)}$

③ جـ = { } = ∅ ن(جـ) = صفر

حساب إحتمال وقوع الحدث جـ = $\frac{صفر}{٦}$ = صفر = $\frac{ن(جـ)}{ن(ف)}$

④ د = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ن(د) = ٦ عدد عناصر الحدث د

حساب إحتمال وقوع الحدث د = $\frac{٦}{٦}$ = ١ = $\frac{ن(د)}{ن(ف)}$

---

* **حساب الاحتمال** إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما فإن إحتمال وقوع أي حدث أ ⊂ ف هو :-

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$$

مسلمات الاحتمال

١) إذا كان أ ⊂ ف فإنه يوجد عدد حقيقي يسمى إحتمال وقوع الحدث أ
ويكون: صفر ≤ ل(أ) ≤ ١ أي أن ل(أ) ∈ [صفر ، ١]

٢) ل(ف) = ١ أي أن إحتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

٣) ل(ϕ) = صفر أي أن إحتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر

٤) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين معرف فإن:
ل(أ ∩ ب) = ϕ ، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

قوانين الاحتمالات

١) ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

(i) إحتمال وقوع أ و ب (ii) احتمال وقوع أ ، ب معاً

٢) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

(i) إحتمال وقوع أ أو ب (ii) إحتمال وقوع أحدهما على الأقل

٣) ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

(i) إحتمال وقوع أ وعدم وقوع ب (ii) إحتمال وقوع أ فقط

٤) ل(أ̄) = ١ − ل(أ)

٥) $ل(\bar{أ} \cup \bar{ب}) = ل(أ \cap ب)' = ١ - ل(أ \cap ب)$

(i) احتمال عدم وقوع الحدثين معاً (ii) احتمال وقوع أحدهما على الأكثر

٦) $ل(\bar{أ} \cap \bar{ب}) = ل(أ \cup ب)' = ١ - ل(أ \cup ب)$

(i) احتمال عدم وقوع أي من الحدثين (ii) احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

ملاحظات

١) إذا كان $أ \subset ب$ فإن:

$ل(أ \cap ب) = ل(أ)$ $ل(أ \cup ب) = ل(ب)$

٢) إذا كان $ل(أ) = ل(\bar{أ})$ فإن: $ل(أ) = \frac{1}{2}$

تدريب ١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف حيث:

$ل(أ) = \frac{3}{8}$ ، $ل(ب) = \frac{3}{4}$ ، $ل(أ \cap ب) = \frac{1}{4}$ أوجد:

١) $ل(أ \cup ب)$ ٢) $ل(أ - ب)$ ٣) $ل(\bar{أ})$ ٤) $ل(\bar{أ} \cap \bar{ب})$

الحل

لاحظ عناصر المسائل يجب يكون موجود: ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب)

لانهم الأساس في أي مطلوب آخر

$ل(أ)$	$\frac{3}{8}$
$ل(ب)$	$\frac{3}{4}$
$ل(أ \cap ب)$	$\frac{1}{4}$
$ل(أ \cup ب)$	$\frac{7}{8}$

١) $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{8}}$

٢) $ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$

٣) $ل(\bar{أ}) = ١ - ل(أ) = ١ - \frac{3}{8} = \boxed{\frac{5}{8}}$

④ $\text{ل}(\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}}) = \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب})' = ١ - \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب})$

$= ١ - \frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

تدريب ٢: اذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان $\text{ل}(\text{أ}) = \frac{٥}{٨}$ ، $\text{ل}(\text{ب}) = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ل}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{٣}{٨}$ أوجد:

① $\text{ل}(\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}})$ ② $\text{ل}(\bar{\text{أ}} \cup \text{ب})$

الحل

لاحظ أن:

ل(أ)	ل(ب)	ل(أ ∩ ب)	ل(أ ∪ ب)
$\frac{٥}{٨}$	$\frac{١}{٢}$	?? $\frac{١}{٤}$	?? $\frac{٧}{٨}$

يجب تكوين الجدول كامل

(i) $\because \text{ل}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{٣}{٨}$

$\therefore \text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{٣}{٨}$

$\therefore \frac{٥}{٨} - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{٣}{٨} \Leftarrow \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{٥}{٨} - \frac{٣}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

(ii) $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٨}$

① $\therefore \text{ل}(\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}}) = \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب})' = ١ - \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = ١ - \frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

② $\text{ل}(\bar{\text{أ}} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\bar{\text{أ}}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\bar{\text{أ}} \cap \text{ب})$

$= ١ - \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{ب} - \text{أ})$

$= ١ - \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{ب}) + \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= ١ - \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٤}$

$\therefore \text{ل}(\bar{\text{أ}} \cup \text{ب}) = \frac{٥}{٨}$

تدريب ٣: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٣ ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٢ أوجد ل(أ) ، ل(ب) :

(١) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين (٢) إذا كان أ ⊂ ب

الحل

لاحظ أن: المسألة هنا مشروطة [لها شروط] لذلك يجب أن نأخذ بشروط المسألة والحل حسب المطلوب والمعلوم

نفرض: ل(أ) = س ∴ ل(ب) = ٣س

(١) الشرط: أ ، ب حدثين متنافيين

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

∴ ٠,٧٢ = س + ٣س

٠,٧٢ = ٤س ⟸ س = $\frac{٠,٧٢}{٤}$ ⟸ س = ٠,١٨

∴ ل(أ) = ٠,١٨ ، ل(ب) = ٠,٥٤

(٢) الشرط: أ ⊂ ب

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

∴ ٠,٧٢ = ٣س ⟸ س = ٠,٢٤

∴ ل(أ) = ٠,٢٤ ، ل(ب) = ٠,٧٢

تدريب ٤: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان احتمال وقوع الحدث أ = ٠,٥ ، واحتمال وقوع الحدث ب = ٠,٦ ، واحتمال عدم وقوع الحدثين معاً = ٠,٨ أوجد :

(١) احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معاً

(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

(٣) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

المعطيات :- احتمال وقوع الحدث أ $ل(أ) = ٠٫٥$

احتمال وقوع الحدث ب $ل(ب) = ٠٫٦$

احتمال عدم وقوع الحدثين معاً $ل(\overline{أ \cap ب}) = ٠٫٨$

$\therefore ل(\overline{أ \cap ب}) = ٠٫٨$

$\therefore ١ - ل(أ \cap ب) = ٠٫٨ \Leftarrow ل(أ \cap ب) = ١ - ٠٫٨ = ٠٫٢$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= ٠٫٥ + ٠٫٦ - ٠٫٢ = ٠٫٩$

(١) احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معاً $ل(أ \cap ب) = ٠٫٢$

(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل $ل(أ \cup ب) = ٠٫٩$

(٣) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

$ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= ٠٫٦ - ٠٫٢ = ٠٫٤$

تدريب فصل دراسي به ٣٠ طالباً منهم ١٨ يدرسون الاحصاء ، ١٠ يدرسون الكمبيوتر ، ٢٢ يدرسون إحدى المادتين على الأقل أختير طالباً عشوائياً إحسب احتمال أن يكون الطالب المختار :-

(١) ممن يدرسون الكمبيوتر والإحصاء (٢) ممن يدرسون الكمبيوتر فقط

(٣) لا يدرس الكمبيوتر (٤) لا يدرس أى من المادتين

الحل

نفرض دارس الكمبيوتر = أ $\therefore ل(أ) = \frac{١٠}{٣٠}$

، دارس الإحصاء = ب $\therefore ل(ب) = \frac{١٨}{٣٠}$

٢٢ يدرسون إحدى المادتين على الأقل $\therefore ل(أ \cup ب) = \frac{٢٢}{٣٠}$

(١) $ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$

∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١٠}{٣٠}$ + $\frac{١٨}{٣٠}$ − $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{١}{٥}$

٢) ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١٠}{٣٠}$ − $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{٤}{٣٠}$ = $\frac{٢}{١٥}$

٣) ل(أ̄) = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{١٠}{٣٠}$ = $\frac{٢٠}{٣٠}$ = $\frac{٢}{٣}$

٤) ل(أ̄ ∩ ب̄) = ل$\overline{(أ ∪ ب)}$ = ١ − ل(أ ∪ ب)
= ١ − $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{٨}{٣٠}$ = $\frac{٤}{١٥}$

تدريب ٦ يصوب جنديان في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو ٠,٥ وإحتمال أن يصيب الجندي الثاني الهدف هو ٠,٦ وإحتمال أن يصيب الجنديان الهدف معاً هو ٠,٣ أوجد إحتمال:

١) أن يصيب الجندي الأول الهدف فقط

٢) أن يصيب أحدهما الهدف على الأقل.

تدريب ٧

١) احتمال الحدث المؤكد =

(أ) ϕ (ب) ف (ج) صفر (د) ١

٢) إذا كان: ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,١ فإن ل(أ̄ ∩ ب) =

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤ (ج) ٠,٣ (د) ٠,١

٣) إذا كان: أ ∩ ب = ϕ ، ل(أ̄) = ٠,٧ ، ل(ب̄) = ٠,٤ فإن ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٣ (ج) ١ (د) ٠,٩

٤) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊂ ب فإن:
ل(أ ∪ ب) =

(أ) ل(أ) (ب) ل(ب) (ج) ل(أ) + ل(ب) (د) ل(أ ∩ ب)

٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما حيث:
ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ فإن: ل(أ̄) + ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٩ (ج) ١,٦ (د) ١

٦) إذا كان ف = {أ ، ب ، جـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:
ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن ل(جـ) =

(أ) $\frac{٤}{١٥}$ (ب) $\frac{٢}{١٥}$ (ج) $\frac{١}{١٥}$ (د) $\frac{١١}{١٥}$

٧) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ب ⊂ أ
وكان ل(أ) = ٠,٩ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن: ل(أ − ب) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٤ (د) ٠,٢